DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2013.05.031

西北大学学报(自然科学版)
2013年10月,第43卷第5期,Oct.,2013,Vol.43,No.5
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

F. Smarandache 数字和函数在特殊数列上值的计算

潘晓玮[1],郭晓燕[2]

(1.西安医学院 公共课部,陕西 西安 710021; 2.西北大学 数学系,陕西 西安 710127)

摘要: 在特殊数列$\{N^3(n)\}$上,根据同余式$n\equiv 0,1,2(\bmod 3)$,利用初等及组合的方法,引入了F. Smarandache 数字和函数$M(n)$的定义,研究了$M(n)$的计算问题,给出了$M(N^3)$的一个确切的计算公式,并解决了Amarnath Murthy及Charles Ashbacher在之前中提出的有关$M(n)$的猜想。

关 键 词: F. Smarandache 数字和函数; 初等方法; 组合方法; 计算公式

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-274X(2013)05-0700-03

The value of the F. Smarandache digit sum function for some special sequences

PAN Xiao-wei[1], GUO Xiao-yan[2]

(1. Department of Common Course, Xi'an Medical University, Xi'an 710021, China;
2. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: On the basis of the special sequence $\{N^3(n)\}$, the concept of the F. Smarandache digit sum function $M(n)$ is introduced. By the elementary and combinational methods, the computational problems of $M(n)$ are studied. Accoding to $n\equiv 0,1,2(\bmod 3)$, an exact computational formula for $M(N^3)$ is given and a series of conjectures related to $M(n)$ are solved.

Key words: the F. Smarandache digit sum function; elementary method; combinational method; computational formula

1 引言及结论

对任意正整数n,设它的十进制表示式为

$$n=a_0+a_1 10+a_2 10^2+\cdots+a_l 10^l,$$

其中,$0\leqslant a_i\leqslant 9$,$i=0,1,2,\cdots,l-1$,$1\leqslant a_l\leqslant 9$。F. Smarandache 数字和函数$M(n)$[1]定义为

$$M(n)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_l,$$

即$M(n)$表示n的十进制中的各位数字之和。例如

$$M(123)=1+2+3=6,$$

$$M(4321)=1+2+3+4=10。$$

对任意正整数k有$M(10^k)=1$,$M(10^k-1)=9k$,$M\left(\frac{1}{9}(10^k-1)\right)=k$,…。关于$M(n)$的性质,许多学者进行了研究,获得了不少重要的结论[2-4]。例如R. E. Kennedy及C. Cooper证明对任意正整数k有渐近公式

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}M^k(n)=\left(\frac{9}{2}\right)^k\ln^k x+O(\ln^{k-\frac{1}{3}}x)。$$

最近,李江华在一篇还未发表的文章中研究了$M(n)$函数在一些特殊数列上的计算问题,给出了下面的结论。

对任意正整数k,设$N_i=(10^{3k+i}-1)/3$,则有计算公式

$$M(N_i^3)=9\cdot(4k+i),$$

收稿日期: 2012-10-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省教育厅科学研究计划基金资助项目(2013JK0561);西安医学院博士科研启动基金资助项目(2012DOC14)

作者简介: 潘晓玮,女,陕西富平人,博士,从事基础数学研究。

其中 $i = 0, \pm 1$。从而解决了 Amarnath Murthy 及 Charles Ashbacher 在文献[5]中的几个猜想。对任意正整数 n，设 $N = N(n) = \frac{1}{3}(10^n + 2)$。这一数列是 F. Smarandache $c(n) = \frac{n2n}{6n}$ 数列的具体表示形式，有关数列 $n2n$ 的详细定义及有关内容参阅文献[5]。现在对数列 $\{N(n)\}$，人们自然会问，是否存在 $N^3(n)$ 的数字和的一个计算公式?

本文的主要目的就是利用初等及组合方法研究这个问题，并给出一个确切的计算公式，即证明下面的定理。

定理 1　对任意正整数 n，设 $N = (10^n + 2)/3$，则当 $n = 3k + i(i = 0, 1, 2)$ 时，有计算公式

$$M(N^3) = 9 \cdot (4k + i) + 1。$$

2　定理 1 的证明

本节用初等及组合方法给出定理 1 的直接证明。文中所使用的所有初等数论知识可以在文献[6]中找到，这里不再重复。对任意正整数 n，当 $n \equiv 0(\bmod 3)$，设 $n = 3k$，$N = (10^{3k} + 2)/3$，于是由二项式展开可得

$$N^3 = \left(\frac{1}{3}(10^{3k} - 1) + 1\right)^3 =$$

$$\frac{1}{27}(10^{9k} - 3 \cdot 10^{6k} + 3 \cdot 10^{3k} - 1) +$$

$$\frac{1}{3}(10^{6k} - 2 \cdot 10^{3k} + 1) + 10^{3k} - 1 + 1 =$$

$$\frac{1}{27}(10^{9k} - 1) - \frac{1}{9}(10^{6k} - 10^{3k}) +$$

$$\frac{1}{3}(10^{6k} - 10^{3k}) - \frac{1}{3}(10^{3k} - 1) + 10^{3k} =$$

$$\frac{1}{27}(10^{9k} - 1) + \frac{2}{9}(10^{6k} - 10^{3k}) -$$

$$\frac{1}{3}(10^{3k} - 1) + 10^{3k} = \frac{1}{3}\overbrace{111\cdots111}^{9k} +$$

$$10^{3k} \cdot \overbrace{222\cdots222}^{3k} - \overbrace{333\cdots333}^{3k} + 1\,\overbrace{000\cdots000}^{3k} =$$

$$\frac{1}{3}\overbrace{111\cdots111}^{9k} + 10^{3k}\overbrace{222\cdots222}^{3k} + \overbrace{666\cdots666}^{3k} + 1 =$$

$$37\,\overbrace{\underbrace{037}\,\underbrace{037}\cdots\underbrace{037}\,\underbrace{037}}^{3k-1} + \overbrace{222\cdots222}^{3k}\,\overbrace{666\cdots666}^{3k} + 1 =$$

$$37\,\overbrace{037037\cdots037037}^{3k-3}\quad\overbrace{037037\cdots037037}^{3k}$$

$$\overbrace{037037\cdots037037}^{3k} +$$

$$\overbrace{222\cdots222}^{3k}\quad\overbrace{666\cdots666}^{3k} + 1 =$$

$$\overbrace{37037037\cdots037037}^{3k-1}$$

$$\overbrace{259259\cdots259259}^{3k}\quad\overbrace{703703\cdots703703}^{3k} + 1 \qquad (1)$$

上式中我们直接用到了求和式

$$\overbrace{037037\cdots037037}^{3k} + \overbrace{666\cdots666}^{3k} =$$

$$\overbrace{703703\cdots703703}^{3k}$$

以及

$$\overbrace{037037\cdots037037}^{3k} + \overbrace{222\cdots222}^{3k} = \overbrace{259259\cdots259259}^{3k}。$$

现在分 3 段来计算式(1)中最终十进制数的各位数字之和。在式(1)中，由于末位加了一个 1，所以最后 $3k$ 位数字之和为 $(7 + 3) \cdot k + 1 = 10k + 1$; 其次，在式(1)中从第 $3k + 1$ 项到 $6k$ 项之间的数字之和为 $(2 + 5 + 9) \cdot k = 16k$。最后，在式(1)中从 $6k + 1$ 位到 $9k - 1$ 位之间数字之和应为 $(7 + 3) \cdot k = 10k$。将这 3 种数字相加即可得到

$$M(N^3) = 10k + 1 + 16k + 10k =$$

$$36k + 1 = 9 \cdot (4k + 0) + 1$$

即当 $3 \mid n$ 或者 $n = 3k$ 时定理 1 成立。

当 $n \equiv 2(\bmod 3)$ 或者 $n = 3k - 1$ 时，设 $N = (10^{3k-1} + 2)/3$，同理由二项式展开可得

$$N^3 = \left(\frac{1}{3}(10^{3k-1} - 1) + 1\right)^3 =$$

$$\frac{1}{27}(10^{9k-3} - 3 \cdot 10^{6k-2} + 3 \cdot 10^{3k-1} - 1) +$$

$$\frac{1}{3}(10^{6k-2} - 2 \cdot 10^{3k-1} + 1) + 10^{3k-1} - 1 + 1 =$$

$$\frac{1}{27}(10^{9k-3} - 1) - \frac{1}{9}(10^{6k-2} - 10^{3k-1}) +$$

$$\frac{1}{3}(10^{6k-2} - 10^{3k-1}) - \frac{1}{3}(10^{3k-1} - 1) + 10^{3k-1} =$$

$$\frac{1}{27}(10^{9k-3} - 1) + \frac{2}{9}(10^{6k-2} - 10^{3k-1}) -$$

$$\frac{1}{3}(10^{3k-1} - 1) + 10^{3k-1} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \overbrace{111\cdots111}^{9k-3} + 10^{3k-1} \cdot \overbrace{222\cdots222}^{3k-1} -$$

$$\overbrace{333\cdots333}^{3k-1} + 1\,\overbrace{000\cdots000}^{3k-1} = \frac{1}{3} \cdot \overbrace{111\cdots111}^{9k-3} + 10^{3k-1} \cdot$$

$$\overbrace{222\cdots222}^{3k-1} + \overbrace{666\cdots666}^{3k-1} + 1 = 37\,\overbrace{\underbrace{037}\,\underbrace{037}\cdots\underbrace{037}\,\underbrace{037}}^{3k-2} +$$

$$\overbrace{222\cdots222}^{3k-1}\,\overbrace{666\cdots666}^{3k-1} + 1 = 37\,\overbrace{037037\cdots03703703}^{3k-2}$$

$$\overbrace{7037\cdots370370}^{3k-1}\ \overbrace{37037\cdots037037}^{3k-1}+$$
$$\overbrace{222\cdots222}^{3k-1}\ \overbrace{666\cdots666}^{3k-1}+1=$$
$$\overbrace{37037037\cdots03703703}^{3k-2}\ \overbrace{92592592\cdots592592}^{3k-1}$$
$$\overbrace{37037\cdots037037}^{3k-1}+\overbrace{666\cdots666}^{3k-1}+1 \qquad (2)$$

同样分 3 段来计算式(2)中最终十进制数的各位数字之和。首先在式(2)中,显然 3 项相加后,第 $3k-1$ 位进上了一位 1,所得之数字的最后 $3k-1$ 位数字之和为 $(7+3)\cdot(k-1)+1+3=10k-6$;其次在式(2)中,3 项相加后从第 $3k$ 项到 $6k-2$ 项之间的数字,由于相加后后面进了一个 1,因此式(2)中 3 项相加后从第 $3k$ 项到 $6k-2$ 项之间的数字之和为
$(5+9+2)\cdot(k-1)+9+2+1=16k-4$

最后,在式(2)中从 $6k-1$ 位到 $9k-4$ 位之间数字之和应为 $(7+3)\cdot k-7=10k-7$。将这 3 种数字相加即可得到

$$M(N^3)=10k-6+16k-4+10k-7=$$
$$36k-9=36k-17=9\cdot(4(k-1)+2)+1。$$

于是证明了当 $n=3k-1=3(k-1)+2$ 时定理 1 成立。

当 $n\equiv1(\bmod 3)$ 或者 $n=3k+1$ 时,设 $N=(10^{3k+1}+2)/3$,同理由二项式展开可得

$$N^3=\left(\frac{1}{3}(10^{3k+1}-1)+1\right)^3=$$
$$\frac{1}{27}(10^{9k+3}-3\cdot10^{6k+2}+3\cdot10^{3k+1}-1)+$$
$$\frac{1}{3}(10^{6k+2}-2\cdot10^{3k+1}+1)+10^{3k+1}-1+1=$$
$$\frac{1}{27}(10^{9k+3}-1)-\frac{1}{9}(10^{6k+2}-10^{3k+1})+$$
$$\frac{1}{3}(10^{6k+2}-10^{3k+1})-\frac{1}{3}(10^{3k+1}-1)+10^{3k+1}=$$
$$\frac{1}{27}(10^{9k+3}-1)+\frac{2}{9}(10^{6k+2}-10^{3k+1})-$$
$$\frac{1}{3}(10^{3k+1}-1)+10^{3k+1}=$$
$$\frac{1}{3}\cdot\overbrace{111\cdots111}^{9k+3}+10^{3k+1}\cdot\overbrace{222\cdots222}^{3k+1}-$$
$$\overbrace{333\cdots333}^{3k+1}+1\,\overbrace{000\cdots000}^{3k+1}=$$
$$\frac{1}{3}\cdot\overbrace{111\cdots111}^{9k+3}+10^{3k+1}\cdot$$
$$\overbrace{222\cdots222}^{3k+1}+\overbrace{666\cdots666}^{3k+1}+1=$$
$$37\,\overbrace{\underbrace{037}\,\underbrace{037}\cdots\underbrace{037}\,\underbrace{037}}^{3k}+$$
$$\overbrace{222\cdots222}^{3k+1}\ \overbrace{666\cdots666}^{3k+1}+1=$$
$$\overbrace{37037037\cdots370370}^{3k}\ \overbrace{3703703\cdots703703}^{3k+1}$$
$$\overbrace{7037037\cdots037037}^{3k+1}+$$
$$\overbrace{222\cdots222}^{3k+1}\ \overbrace{666\cdots666}^{3k+1}+1=$$
$$\overbrace{370370\cdots370370}^{3k}\ \overbrace{37037\cdots03703}^{3k+1}$$
$$\overbrace{7037037\cdots037037}^{3k+1}+$$
$$\overbrace{222\cdots222}^{3k+1}\ \overbrace{666\cdots666}^{3k+1}+1 \qquad (3)$$

同样分 3 段来计算式(3)中最终十进制数的各位数字之和。首先,在式(3)中,显然 3 项相加后所得之数字的第 $3k+1$ 位数字进上了一个 1,因此,后 $3k+1$ 位数字之和应为 $(7+3)\cdot k+3+1=10k+4$;其次,在式(3)中,3 项相加后从第 $3k+2$ 项到 $6k+2$ 项之间的数字,由于相加后进上了一个 1,因此式(3)中 3 项相加后从第 $3k+2$ 项到 $6k+2$ 项之间的数字之和为 $(5+9+2)\cdot k+3+2+1=16k+6$。最后,在式(3)中,从 $6k+3$ 位到 $9k+2$ 位之间数字之和应为 $(7+3)\cdot k=10k$。将这 3 种数字相加即可得到

$$M(N^3)=10k+4+16k+6+10k=$$
$$36k+10=9\cdot4(k+1)+1,$$

即当 $n=3k+1$ 时定理成立。

结合以上 3 种情况即完成定理 1 的证明。

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] COOPER C, KENNEDY R E. Digit sum sums [J]. J Inst Math Comp Sci, 1992, 5:45-49.

[3] COOPER C, KENNEDY R E. Sums of powers of digital sums [J]. The Fibonacci Quarterly, 1993, 31(4): 341-345.

[4] BROWN T C. Power of digital sums [J]. The Fibonacci Quarterly, 1994, 32(3): 207-210.

[5] MURTHY A, ASHBACHER C. Generalized Partitions and New Ideas On Number Theory and Smarandache Sequences [M]. Hexis: Phoenix, 2005.

[6] 张文鹏,李海龙. 初等数论 [M]. 西安:陕西师范大学出版社,2008.

(编　辑　亢小玉)